Bruit en électronique: Analyse temporelle et fréquentielle

Analog ICs

Adil KOUKAB

EPFL

Outline 1

- Généralités sur le bruit
- Analyse Temporelle
  - Etude statistique et loi de distribution d'amplitude
  - Puissance moyenne et tension efficace (RMS)
  - Sources multiple de bruit (corrélées et non-corrélées)
- Analyse Fréquentielle
  - Densité spectrale de puissance (DSP)
  - Bruit Thermique des Résistances
  - Bruit dans un AmpliOp
- Bruit à travers un système linéaire à fonction de transfert $H(j\omega)$:
  - Propagation et façonnement du bruit par $H(j\omega)$
  - Propagation et façonnement du bruit par filtre passe-bas d'ordre n
- Analyse du bruit dans un circuit électronique
- Eude de cas:

Généralités sur le bruit

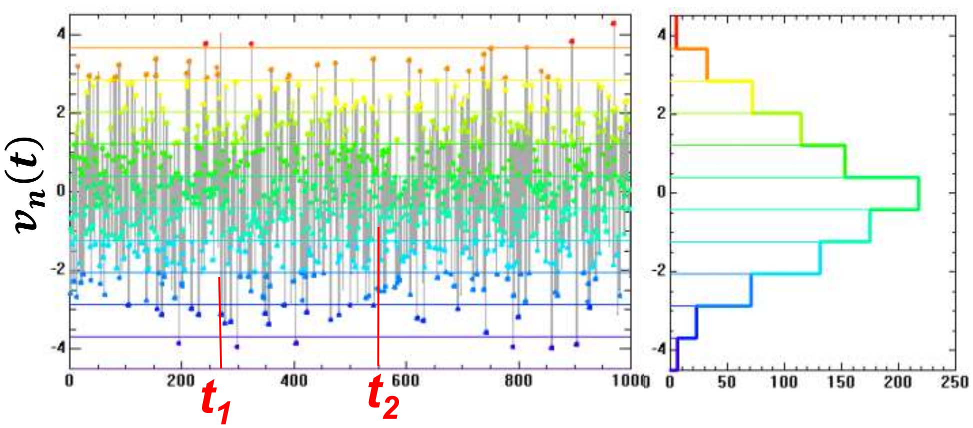
- Un signal est toujours affecté de petites fluctuations aléatoires plus ou moins importantes qu'on appelle bruit.
- Origines diverses :
  - Bruit inhérent aux composants électroniques: agitation thermique des e^-, défauts cristallins, états d'interface, ions qui piègent et libèrent les électrons aléatoirement …
  - Bruit externe: couplage électromagnétique, lumière …
- Limite la **sensibilité** d'un système élec. (signal min. détectable)
  - C'est le niveau du bruit par rapport au signal utile qui importe c.à.d. le paramètre « rapport signal sur bruit ou SNR ».

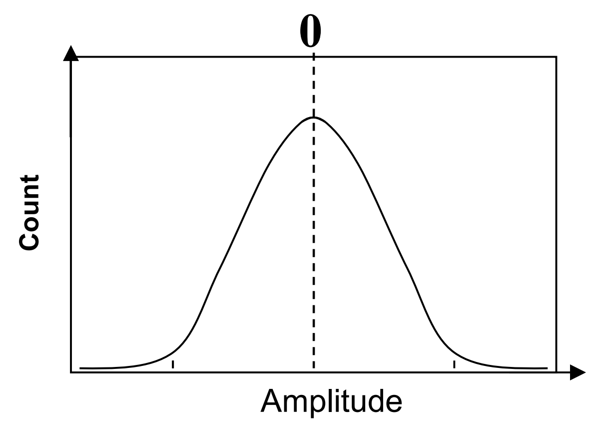
Analyse Temporelle

- Complication: Bruit est un signal aléatoire (pas de formule analytique)

→ Solution: Analyse statistique

- Si on observe le bruit sur une **longue période**, nous pourrons construire **la distribution d'amplitudes** (courbe de probabilité), indiquant combien de fois chaque valeur est atteinte.

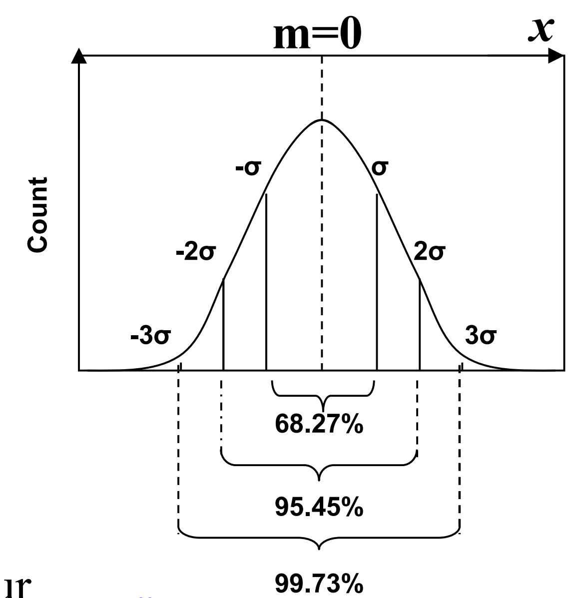




Loi de distribution d'amplitude

- **The central limit theorem** stipule que puisque le bruit en électronique découle d'un grand nombre de phénomènes aléatoires il sera décrit par la loi normale (Gaussienne) dont l'allure et la formule sont les suivantes:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}$$



- Avec **σ, l'écart type,** qui caractérise la dispersion des valeurs échantillonnés autour de la moyenne **m (ici 0).**

- **P(x)** est une **densité de probabilité** c.à.d que la probabilité pour que l'amplitude du bruit soit comprise entre x_1 et x_2 est donnée par: $\int_{x_1}^{x_2} P(x)dx$

→ Comment calculer σ?

- On peut **démontrer numériquement** que la probabilité pour que l'amplitude du bruit soit comprise entre: **[-σ, +σ]** is **68.27%**, and **[-3σ et +3σ] is 99.73%.**

6σ est souvent considérée comme le «worse case » du bruit crête-à-crête du bruit

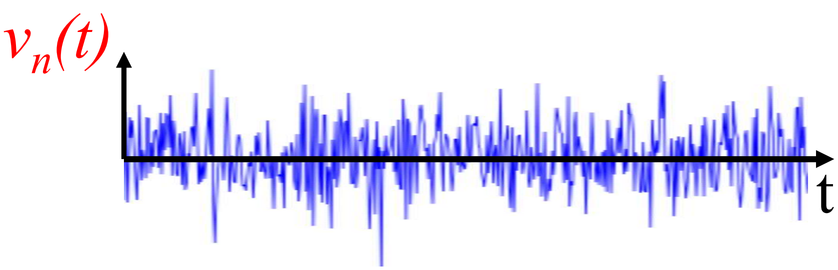
Ecart type et puissance de bruit

L'écart type σ qui caractérise la dispersion des valeurs échantillonnées autour de la moyenne **m** (ici m= $\overline{v_n(t)}$ =0) est donné par:

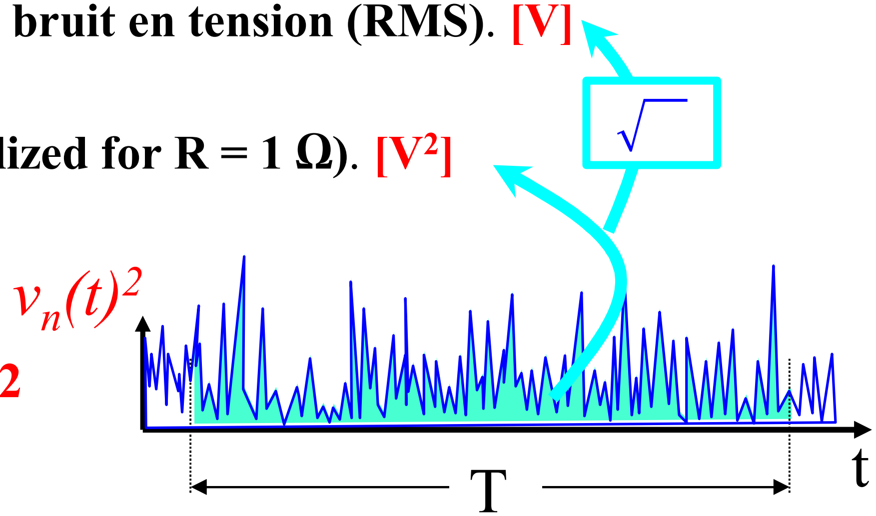
$$\sigma_n = v_{n,RMS} = \sqrt{\overline{(v_n(t) - m)^2}} = \sqrt{\overline{(v_n(t))^2}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_n(t)^2 dt}$$

$\sigma_n = \sqrt{\overline{v_n{}^2}} \equiv v_{n,RMS}$: **tension efficace du bruit en tension (RMS). [V]**

$\overline{v_n{}^2} = \sigma_n{}^2 \equiv$ **Puissance du bruit (normalized for R = 1 Ω). [V²]**



$(\ )^2$



Cas de plusieurs sources de bruit

- Dans le cas de deux sources v_{n1} and v_{n2}, la puissance moyenne résultante est:

$$\overline{(v_{n1}+v_{n2})^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(v_{n1}(t)+v_{n2}(t)\right)^2 dt$$

$$= \overline{v_{n1}^{\,2}} + \overline{v_{n2}^{\,2}} \quad + \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2v_{n1}(t)v_{n2}(t)dt$$

- L'intégral résiduel est appelé terme de corrélation.
- Ce terme → 0 si **les sources ne sont pas corrélées (indépendantes)**
- **Dans les circuits les sources sont souvent non-corrélées.** (Ex: le bruit généré par une résistance n'est pas corrélé avec celui d'un transistor).
- On peut donc écrire $\overline{\left(v_{n1,2}\right)^2} = \overline{v_{n1}^{\,2}} + \overline{v_{n2}^{\,2}}$

→ La superposition est valable pour les puissances si les sources sont non-corrélées.

Rapport signal sur bruit (SNR)

- Rapport signal sur bruit SNR: mesure le niveau du signal utile $\overline{v_s{}^2}$ par rapport au niveau du bruit $\overline{v_n{}^2}$, en d'autre termes le SNR est le rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit:

$$SNR_{dB} = 10\log\left(\frac{\overline{v_s{}^2}}{\overline{v_n{}^2}}\right) = 20\log\left(\frac{v_{s,RMS}}{v_{n,RMS}}\right)$$

- Pourquoi le SNR est important?:
  - Le niveau du bruit n'a de sens que comparé au niveau du signal utile.
  - L'optimisation du bruit n'est effective que si elle ne dégrade pas le signal utile.

→ Optimiser le SNR est plus efficace.

Outline 1

- Généralités sur le bruit
- Analyse Temporelle
  - Etude statistique et loi de distribution d'amplitude
  - Puissance moyenne et tension efficace (RMS)
  - Sources multiple de bruit (corrélées et non-corrélées)
- Analyse Fréquentielle
  - Densité spectrale de puissance (DSP)
  - Bruit dans un AmpliOp
  - Bruit Thermique des Résistances
- Bruit à travers un système linéaire à fonction de transfert H(jω):
  - Propagation et façonnement du bruit par H(jω)
  - Propagation et façonnement du bruit par filtre passe-bas d'ordre n
- Analyse du bruit dans un circuit électronique
- Eude de cas:

Analyse fréquentielle

Remarque: Le concept de la puissance moyenne $\overline{v_n^{\,2}}$ **quantifie** le bruit et donne des caractéristiques statistiques de son amplitude *(Ex. 6σ is the worse case for pick to pick amplitude of v_n)*

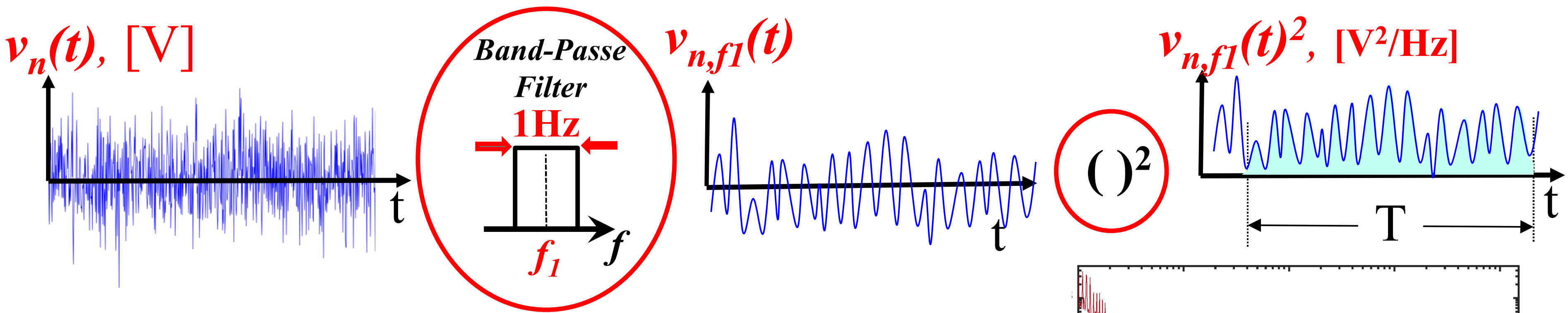
Ne renseigne pas sur sa composition fréquentielle.

- Or la décomposition fréquentielle du bruit (DSP: densité spectrale du bruit) est fondamentale en électronique
  - **ex: l'amplification et le filtrage varient en fonction de la fréquence**

➢ **<u>Définition</u>: DSP ≡ la puissance du bruit transportée par le signal à chaque fréquence.**

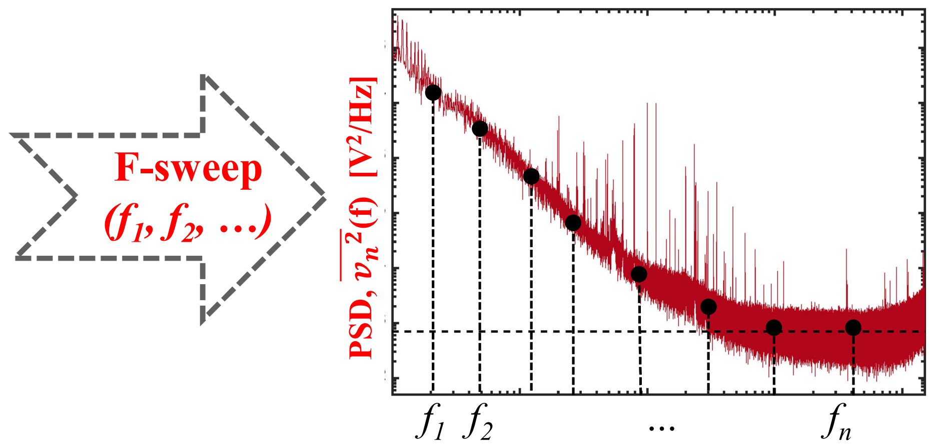
Densité spectrale de puissance DSP

- La décomposition fréquentielle du bruit $v_n(t)$ qui aboutit à la puissance moyenne par Hz (ou **DSP**) $\overline{v_n^{\,2}}(f)$ [W/Hz] est réalisée comme suit:



$$\overline{v_n^{\,2}}(f_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v_{n,f1}(t)^2\,dt$$

[V²/Hz]



➢ La puissance totale de bruit en [V²] is: $\overline{v_n^{\,2}} = \int_0^{\infty} \overline{v_n^{\,2}}(f)\,df = \sigma_n^{\,2}$

DSP du bruit en tension d'un AO LF356

e_n	Equivalent Input Noise Voltage	R_S = 100 Ω	f = 100 Hz	LFx55	25	nV/√Hz
				LFx56, LF356B	15	
				LFx57	15	
			f = 1000 Hz	LFx55	20	nV/√Hz
				LFx56, LF356B	12	
				LFx57	12	

$$\equiv \sqrt{DSP} = \sqrt{\overline{v_n{}^2}(f)}$$

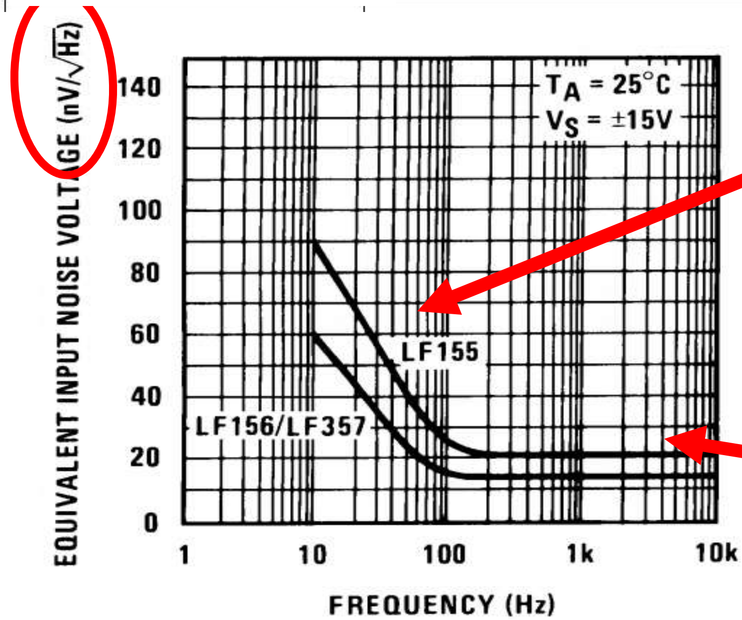


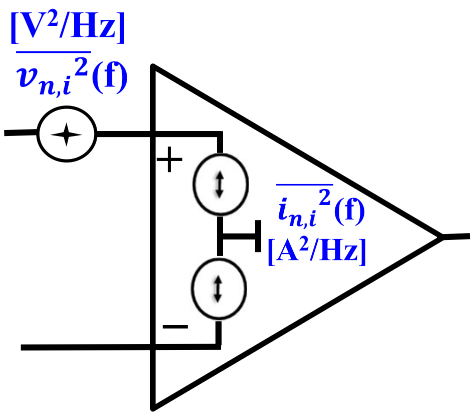
Figure 32. Equivalent Input Noise Voltage

Deux types de bruit:

Bruit 1/f (flicker): dû au piégeage et dé-piégeage des porteurs par les défauts dans les composants.

Bruit blanc (thermique): indépendant de la fréquence et due à l'agitation thermique.

Sources de Bruit dans un AmpliOp



OP37

SPECIFICATIONS ($V_S = \pm 15$ V, $T_A = 25°C$, unless otherwi

Parameter	Symbol	Conditions	OP37A/E Min	OP37A/E Typ	OP37A/E Max	Unit
Input Offset Voltage	V_{OS}	Note 1		10	25	µV
Long-Term Stability	V_{OS}/Time	Notes 2, 3		0.2	1.0	µV/Mo
Input Offset Current	I_{OS}			7	35	nA
Input Bias Current	I_B			±10	±40	nA
Input Noise Voltage	$e_{n\,p\text{-}p}$	1 Hz to 10 Hz[3, 5]		0.08	0.18	µV p-p
Input Noise Voltage Density	e_n	f_O = 10 Hz[3] f_O = 30 Hz[3] f_O = 1000 Hz[3]		3.5 3.1 3.0	5.5 4.5 3.8	nV/√Hz
Input Noise Current Density	i_N	f_O = 10 Hz[3, 6] f_O = 30 Hz[3, 6] f_O = 1000 Hz[3, 6]		1.7 1.0 0.4	4.0 2.3 0.6	pA/√Hz

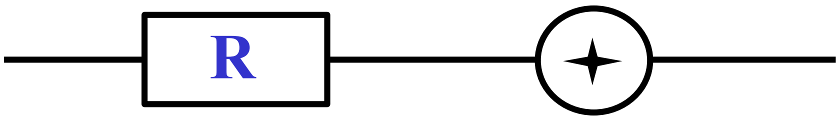
- Le bruit en sortie de l'AO est produit par tous ses composants.
- Caractérisé par trois sources de bruit, une en tension $\overline{v_{n,i}^{2}}(f)$ et deux en courant $\overline{i_{n,i}^{2}}(f)$.
- Le bruit en courant n'est important que s'il circule dans une résistance externe à l'AO et donc s'il génère un bruit en tension.

Bruit Thermique d'une Résistance "Johnson noise"

Résistance: Agitation Thermique → Mouvement aléatoire de électrons

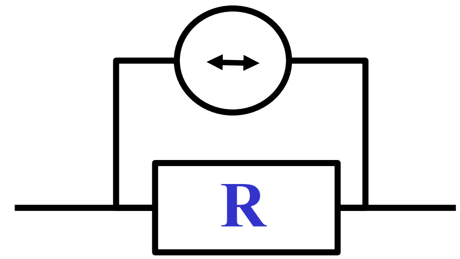
→ Bruit en tension d'une DSP: $\overline{v_n^2}(f) = 4kTR$ [V²/Hz]

$\overline{v_n^2}(f) = 4kTR$ [V²/Hz]

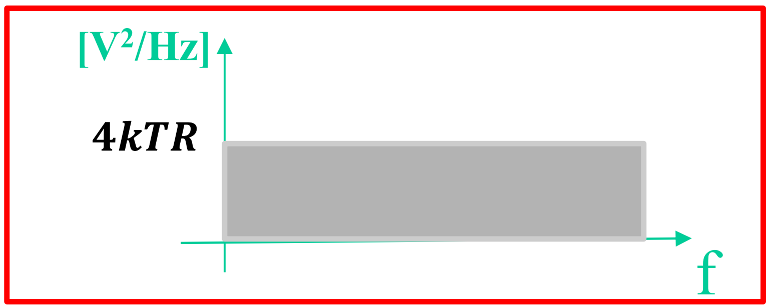


Norton representation

$\overline{i_n^2}(f) = 4kT/R$ [A²/Hz]



Avec: **k is Boltzmann constant = 1,38 10^{-23} [j/K]**
T = Temperature in [°K]
R = resistance in Ω

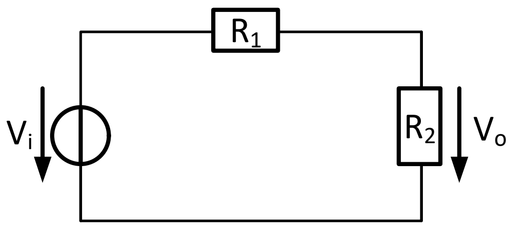


Remarque: Le bruit thermique en tension augmente avec T, R et la bande passante.

- Cas particulier: R = 1 kΩ @ 300 °K à un bruit en tension $\sqrt{\overline{v_n^2}} = \sqrt{4kTR}$ = **4 nV/**$\sqrt{Hz}$
- → **pour** $R = x\ k\Omega$ donne $\sqrt{\overline{v_n^2}} = \sqrt{x}$ **. 4. nV/** $\sqrt{Hz}$

Exemple 1 : diviseur résistive

- Déterminer le bruit à la sortie d'un diviseur résistive (R_1, R_2) et analyser l'impact de chaque résistance.
- Réévaluer cet impact en utilisant de rapport signal sur bruit (SNR).



$$\overline{v_{n,o}^{2}}(\mathrm{f}) = 4\mathrm{kT}(\mathrm{R}_1//\mathrm{R}_2) = \frac{R_2 R_1}{R_2+R_1}\ [\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}]$$

$$\overline{v_{n,o}^{2}} = 4\mathrm{kT}(\mathrm{R}_1//\mathrm{R}_2)\ \Delta\mathrm{f}\ [\mathrm{V}^2]$$

Output Noise ↘ if R_1 ↘ and R_2 ↘

$\neq$

$$|A_v| = \frac{R_2}{R_2+R_1}$$

$$SNR = \frac{\overline{v_o^2}}{\overline{v_{n,o}^2}} = \frac{\left(\frac{R_2}{R_2+R_1}\right)^2 \overline{v_i^2}}{\frac{R_2 R_1}{R_2+R_1}4\mathrm{kT}} = \frac{R_2}{4kTR_1(R_2+R_1)}\overline{v_i^2} = \frac{\overline{v_i^2}}{4kT}\frac{1}{R_1\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

SNR ↗ if R_1 ↘ and R_2 ↗

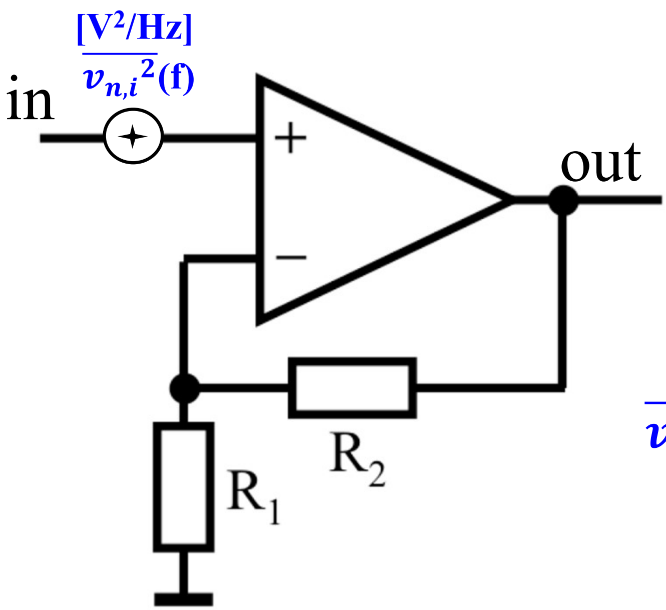
Conclusion: L'optimisation du bruit par diminution de R_2 est contre-productive puisqu'elle dégrade encore plus le signal utile

→ *Optimiser le SNR est toujours plus judicieuse.*

Exemple 2:Cas d’un Ampli non-inverseur

- Soit l’ampli non-inverseur ci-dessous de gain $A_0 \approx 40$ dB réalisé avec l’AmpliOp OP37:
  - Identifier toutes les sources de bruit, calculer leurs densité spectral en tension [$V/\sqrt{Hz}$] à 1kHz et indiquer leur emplacement (sortie ou entrée). En déduire l’équivalent de la densité spectral totale du bruit en tension à l’entrée (in).

Données: $\overline{v_{n,i}{}^2}(f) \approx \left(3\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$; $\overline{i_{n,i}{}^2}(f) \approx \left(0.4\frac{pA}{\sqrt{Hz}}\right)^2$ **; $R_1 \approx 1$ kΩ et $R_2 \approx 10^2$ kΩ.**



$$\overline{v_{n,i}{}^2}(R_1) = (4\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}})^2$$

$$\overline{v_{n,o}{}^2}(R_2) = (10 \times 4\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}})^2 = \left(40\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

$$\overline{v_{n,i}{}^2}(R_2) = (10 \times 4\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}})^2\, G^{-2} = \left(0.4\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

$$\overline{v_{n,i}{}^2}(\text{Amp}) = \overline{i_{n,i}{}^2}(f)\,(R_1//R_2)^2 + \overline{v_{n,i}{}^2}(f)$$

$$= (0.4\,\frac{pA}{\sqrt{Hz}})^2\; 10^6\,\Omega^2 + \left(3\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

$$= (0.4\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}})^2 + \left(3\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

$$\overline{v_{n,i}{}^2} = \overline{v_{n,i}{}^2}(R_1) + \overline{v_{n,i}{}^2}(R_2) + \overline{v_{n,i}{}^2}(\text{Amp}) \approx \left(5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

Outline 1

- Généralités sur le bruit
- Analyse Temporelle
  - Etude statistique et loi de distribution d'amplitude
  - Puissance moyenne et tension efficace (RMS)
  - Sources multiple de bruit (corrélées et non-corrélées)
- Analyse Fréquentielle
  - Densité spectrale de puissance (DSP)
  - Bruit Thermique des Résistances
  - Bruit dans un AmpliOp
- Bruit à travers un système linéaire à fonction de transfert H(jω):
  - Propagation et façonnement du bruit par H(jω)
  - Propagation et façonnement du bruit par filtre passe-bas d'ordre n
  - Méthodologie d'analyse du bruit dans un circuit électronique
- Eude de cas:

Noise Amplification and Filtering

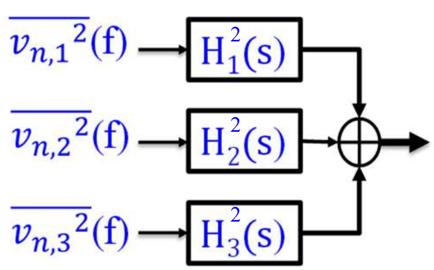
- Noise shaping Theorem: Une DSP $\overline{v_{n,i}{}^{2}}(\mathrm{f})$ [V²/Hz] à l'entrée d'un system linéaire dont la fonction de transfert et H(f), donne à la sortie une PSD $\overline{v_{n,o}{}^{2}}(\mathrm{f})$ donnée par:

$$\overline{v_{n,o}{}^{2}}(\mathrm{f}) = \overline{v_{n,i}{}^{2}}(\mathrm{f})\,|H(f)|^{2} \ [\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}].$$

- Et une puissance totale à la sortie:

$$\overline{v_{n,o}{}^{2}} = \int_{0}^{\infty} \overline{v_{n,i}{}^{2}}(\mathrm{f})\,|H(f)|^{2}\,df \ \ [\mathrm{V}^2]$$

- Dans le cas de sources multiples



$$\overline{v_{n,o}{}^{2}}(\mathrm{f}) = \sum_{j=1}^{3} \overline{v_{n,j}{}^{2}}(\mathrm{f})\,|H_j(f)|^{2}$$

Exemple3: Filtre passe-bas d'ordre 1

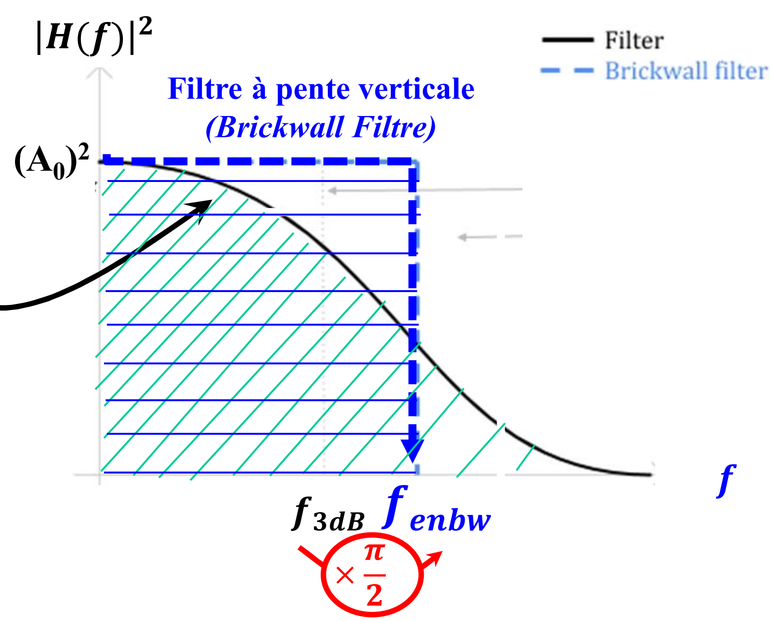
- Example: cas d'un bruit blanc ($\overline{v_{n,i}{}^2}(f) = N = cst\ [V^2/Hz]$) à l'entrée d'un filtre passe-bas d'ordre 1 et de pôle $f_p = f_{3dB}$.

Q: Estimer la puissance du bruit à la sortie $\overline{v_{n,o}{}^2}$ [V²] et sa valeur crête-à-crête maximale $v_{n,p\text{-}p,max}$ [V].

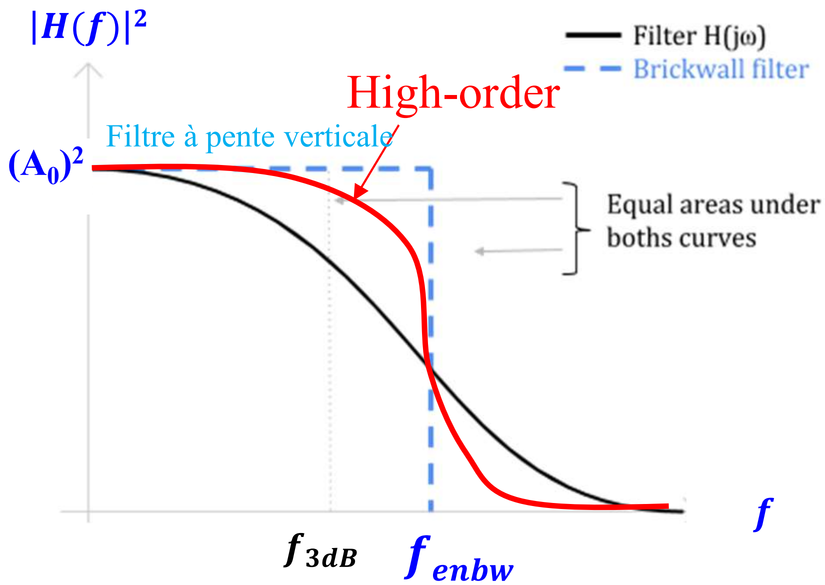
Note: $H(f) = \frac{A_0}{1+\frac{jf}{f_c}}$ and $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arctg\,x + c$

$$\overline{v_{n,o}{}^2} = N \int_0^\infty \underbrace{\frac{A_0{}^2}{1+\left(\frac{f}{f_{3dB}}\right)^2}} df = N.\boldsymbol{A_0}^2 \boldsymbol{f_{3dB}} \left[Arctg\ x\right]_0^\infty = N\ \boldsymbol{A_0}^2\ \underbrace{\boldsymbol{f_{3dB}} \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}}_{\boldsymbol{f_{ENBW}}}$$

Equivalent Noise Bandwidth



ENBW “*Equivalent noise Bandwidth*” pour filtre d’ordre n



$$H(f) = \frac{A_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_c}\right)^n}$$

Filter Order n	f_{enbw}/f_{-3dB}
1	$\pi/2 = 1.57$
2	1.22
3	1.15
4	1.13

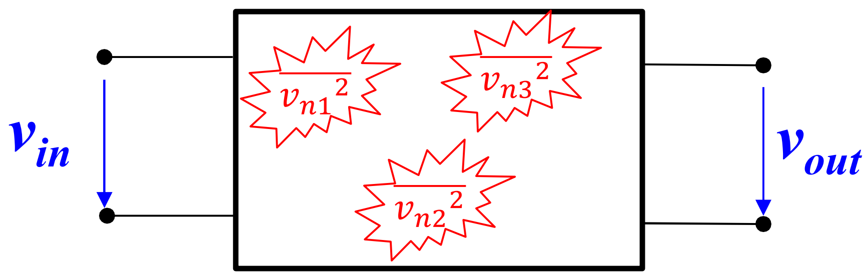
Plus l’ordre du filtre augmente, plus son atténuation devient raide et approche donc celle du “Filtre à pente vertical”

$$\rightarrow \frac{f_{ENBW}}{f_{3dB}} \xrightarrow[n\nearrow]{} 1$$

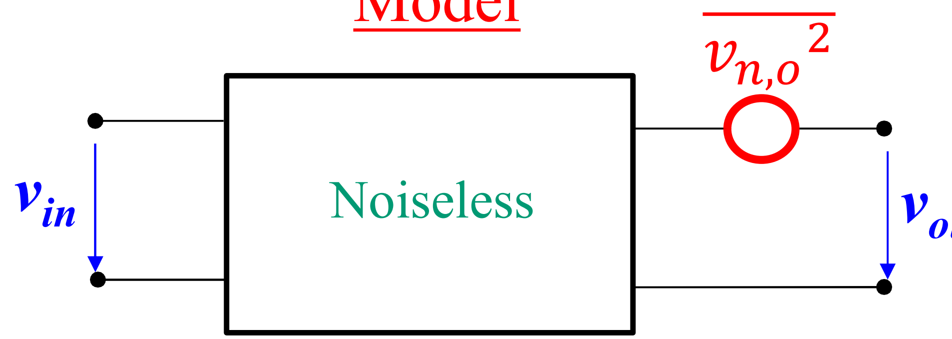
$$\boxed{\overline{v_{n,o}{}^2} = \underbrace{N}_{\text{Bruit blanc [V2/Hz]}}.\,A_0{}^2\, f_{enbw} = \sigma^2}$$

Remarque: $f_c = f_{-3dB \times n}$

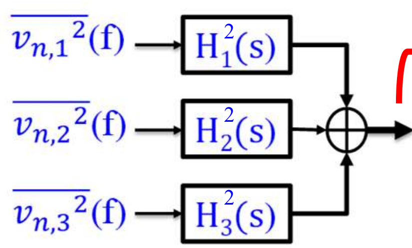
Circuit-Noise Analysis and Modeling Procedure



Model



- Identifier les sources de bruit.
- Déterminer ($H_i(s)$) de $\overline{v_{ni}^2}$ à la sortie.
- Additionner les puissances de toutes les contributions (non-corrélées) à la sortie comme suit:



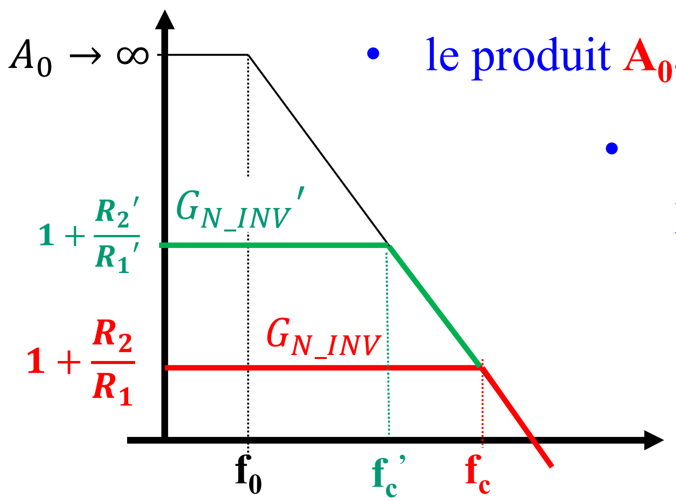
$$\overline{v_{n,o}^2}(f) = \sum_{j=1}^{3} \overline{v_{n,j}^2}(f)\,|H_j(f)|^2$$

Impérfection de l'AmpliOp: Rappel

AO idéal:

$$\begin{cases} R_{in} \to \infty \Rightarrow i+ = i- \\ A \to \infty \quad \Rightarrow (\mathbf{AO} + \mathbf{ReacNeg}) \Rightarrow v^+ = v^- \\ R_{out} \to 0 \Rightarrow \text{Gain indep de } R_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{N\_INV} = \frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \\ G_{INV} = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \end{cases}$$

AO réel: $A \to \infty$ *seulement pour* $f < fo$ $\Rightarrow \begin{cases} G_{N\_INV} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \\ G_{INV} = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \end{cases}$ *seulement pour* $f < f_c$



- le produit $\mathbf{A_0.f_0}$ est appelé le produit **Gain·Band-passante ou GBW [Hz]**
- GBW est une caractéristique de l'AmpliOp donnée par le fabricants: Ex: GBW (LM741) ≈ 1 MHz et GBW (LM356) ≈ 5MHz.

f_c=?

- On peut aussi démontrer que:

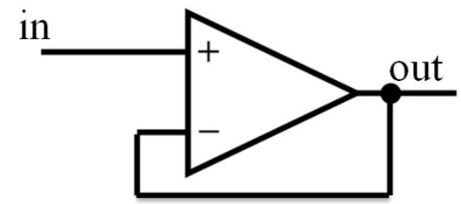
$$GBW = A_o f_o = G_{N\_INV} f_c = G_{N\_INV}' f_c'$$

- Si on connait $\mathbf{G_{N\_INV}}$ on peut déterminer f_c

EPFL

Exemple 4.a: Cas d'un suiveur

- Calculer la puissance du bruit $\overline{\boldsymbol{v_{n,o}}^2}$[V²] et $v_{n,pp,max}$ à la sortie d'un suiveur réalisé avec l'AmpliOp (OP37)
- (OP7: $\overline{\boldsymbol{v_{n,i}}^2}(\boldsymbol{f}) \approx \left(\mathbf{3}\,\frac{\boldsymbol{nV}}{\sqrt{\boldsymbol{Hz}}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{N}$; $\overline{\boldsymbol{i_{n,i}}^2}(\boldsymbol{f}) \approx \left(\mathbf{0.4}\,\frac{\boldsymbol{pA}}{\sqrt{\boldsymbol{Hz}}}\right)^{\mathbf{2}}$; GBW = 63 MHz.



- <u>Solution:</u>

La fonction de transfert d'un AO en configuration suiveur est:

$\underline{H}(\mathrm{j}2\pi f) = \frac{A_0}{1+j\frac{f}{f_{3dB}}}$ avec $A_0 = 1$ et $f_{3dB} = \mathrm{GBW}/\ A_0 = 2$ MHz

$$\overline{v_{n,o}{}^2} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \overline{\boldsymbol{v_{n,i}}^2}(\boldsymbol{f}).\ \left|\ \underline{\mathbf{H}}\ (\mathbf{j}\ \mathbf{2\pi f})\ \right|^{\mathbf{2}} \boldsymbol{df} = N\int_0^{f_{enbw}} A_0{}^2 df = N.A_0{}^2\, f_{3dB}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= (3\ 10^{-9})^2.\ 63\ 10^6.\ \frac{\pi}{2} = 8.9\ 10^{-10}\ \mathrm{V}^2 = \left(29.83\,\frac{uV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

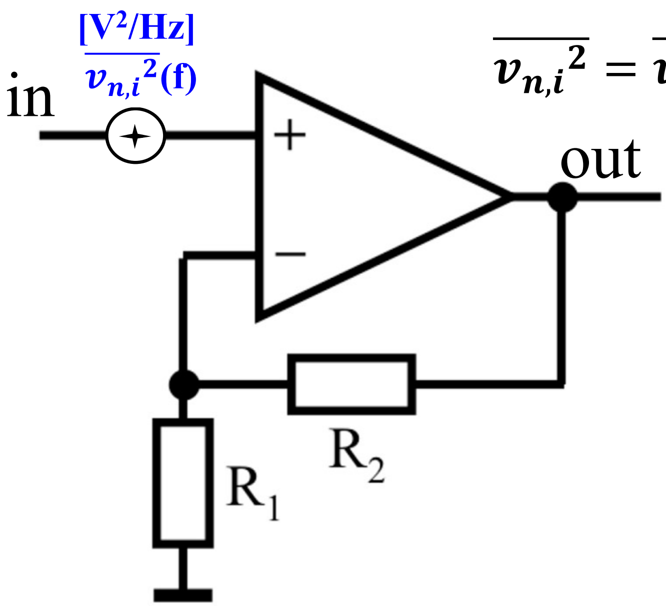
Rq: $\overline{\boldsymbol{i_{n,i}}^2}$ sans effet car ne traversant aucune résistance

La valeur crête à crête maximale du bruit (dans 99.73 % des cas) est

$$v_{n,pp,max} \approx 6\sigma = 6\sqrt{\overline{v_{n,o}{}^2}} \approx 179\ \mu V$$

Exemple 4 b:Cas d'un Ampli non-inverseur

- Calculer le bruit en tension $\sqrt{\overline{v_{n,o}^{2}}}$ [uV] à la sortie de l'AmpliOp de l'exemple 2.
  - **La contribution du Bruit 1/f de OP 37 est négligeable et son GBW = 63 MHz**



$$\overline{v_{n,i}^{2}} = \overline{v_{n,i}^{2}}(R_1) + \overline{v_{n,i}^{2}}(R_2) + \overline{v_{n,i}^{2}}(Amp) \approx \left(5\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2$$

$$\overline{v_{n,o}^{2}} = \overline{v_{n,i}^{2}}\,.\,A_0^{\;2}\, f_{3dB}\,\frac{\pi}{2}$$

avec . $A_0 = 10^2$ et f_{3dB} = GBW/A0 = 0.63 MHz

$$\overline{v_{n,o}^{2}} = \left(5\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 10^4\; 0.63\; 10^6\,\frac{\pi}{2} = 250\ nV^2$$

$$\text{et}\quad \sigma = v_{n,RMS} = \sqrt{\overline{v_{n,o}^{2}}} \approx 0.5\ mV$$

La valeur crête à crête maximale du bruit (dans 99.73 % des cas) est

$$v_{n,pp,max} \approx 6\sigma \;\approx 3\ mV$$